→ Νουμα.
Βιβλία: ① Ακριβη ② Βραχατη Αριθμ. Ανάλυση

07/10/2019

→ Τι είναι Αριθμητική Ανάλυση;
Αριθμητική Ανάλυση είναι ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που μετατρέπει τα μαθηματικά προβλήματα σε αντίστοιχα που λύνονται ή προσεγγίζονται με τη χρήση Η/Υ. Δηλαδή με τις 4 πράξεις της αριθμητικής. Ουσιαστικά διακριτοποιεί τα συνεχή προβλήματα των μαθηματικών και λύνει τα αντίστοιχα διακριτά.

Στόχος της Αρ. Ανάλυσης: Είναι η επινόηση «αξιόπιστων» και «αποτελεσματικών» μεθόδων.

Αξιόπιστη: με την έννοια ότι μικρά σφάλματα στους υπολογισμούς επιφέρουν μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα.
Ελέγχονται άνω φράγματα του σφάλματος.

Αποτελεσματική: με την έννοια ότι μπορεί να λυθεί με Η/Υ σε χρόνο ώστε να είναι αξιοποιήσιμο το αποτέλεσμα.
Γίνεται ανάλυση σφαλμάτων

Σφάλματα: Δύο είδη αριθμητικών σφαλμάτων
(1) Σφάλματα διακριτοποίησης ή προσέγγισης
(2) Σφάλματα στρογγυλοποίησης του Η/Υ.

Παράδειγμα:

Έστω f συνεχής κ' παραγωγίσιμη δύο φορές στο (a,b) $(f \in C^2(a,b))$

Να προσεγγιστεί η $f'(x_0)$, $x_0 \in (a,b)$

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ κοντά στο x_0 κ προσεγγ. την $f'(x_0)$ ως $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Αναπτύσσουμε την $f(x_1)$ κατά Taylor στο x_0

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (\min\{x_0, x_1\}, \max\{x_0, x_1\})$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{x_1 - x_0}{2} \cdot f''(\xi) \iff \varepsilon = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0) = \frac{x_1 - x_0}{2} f''(\xi)$$

$\varepsilon = x^* - x$, το απλό σφάλμα.

Απόλυτο σφάλμα: $|\varepsilon| = |x^* - x|$

Σχετικό σφάλμα: $d = \dfrac{\varepsilon}{x} = \dfrac{x^* - x}{x} \approx \dfrac{x^* - x}{x^*}$

Απόλυτο σχετικό σφάλμα: $|d| = \dfrac{|\varepsilon|}{|x|} = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} \approx \dfrac{|x^* - x|}{|x^*|}$

$$|\varepsilon| = \frac{|x_1 - x_0|}{2} |f''(\xi)| = \frac{h}{2} |f''(\xi)|$$

Έστω f'' φραγμένη στο (a,b) και $M = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)|$ τότε

$$|\varepsilon| \leq \frac{h}{2} M$$

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in (a,b)$ τέτοια ώστε $x_1 - x_0 = x_0 - x_2 = h > 0$.

Προσεγγίζουμε την $f'(x_0)$ ως $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2h}$

Θεωρούμε ότι $f \in C^3(a,b)$. Αναπτύσσω κατά Taylor τα $f(x_1) = f(x_0 + h)$ και $f'(x_0) = f(x_0 + h)$ στο x_0.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_1)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x) + h^2 f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_0)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$\varepsilon = \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$. Έστω f''' φραγμένη στο (a,b) και

$M = \max_{x \in (a,b)} |f'''(x)|$. Τότε $|\varepsilon| \leq \frac{h^2}{12}(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|) \leq \frac{h^2}{12} 2M = \frac{h^2}{6} M$

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Συστήματα αριθμών

Στο δεκαδικό σύστημα ένας αριθμός παριστάνεται ως $(a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots)_{10}$

όπου $0 \leq a_i \leq 9$

$(a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_b$, όπου $0 \leq a_i \leq b-1$

$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$

Για το ακέραιο μέρος υπολογίζω το $P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $x = 10$

αντίστοιχα $x = b$ για σύστημα με βάση b.

Για το κλασμ. μέρος υπολογίζω τη διαφορά/σειρά.

$a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$

Σχήμα Horner

$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\ldots x a_N)) \ldots)$

$y \leftarrow a_N$

Για $i = N-1, N-2, \ldots, 0$

$y \leftarrow a_i + xy$